目录

2B

基似乎是一种奇异的交汇点，张成且不无关的组和无关且不张成的组都可以向基转换。

另外，我仍然觉得 $\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_{k-1})$ 这样的表述非常好，看似削减了抽象性，但用于证明时的置信度仍然有力。

2.33 最大的意义并不是它本身，而是展示了用基解构和表述直和的方式。

homework

1. {0}
2. 略
3. (a) $U = \{3x_2, x_2, 7x_4, x_4, x_5\}$，向量组 $B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ 是一个基

   (b) 增加->削减的程序解放了大脑。$\left\{ B, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \right\}$ 会丢弃 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (c) 令 $W = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
4. 与上一题完全一样。（不要以为一个维度需要两个向量）
5. $V = U + W$ 意味着对于 $\forall v \in V, \exists u \in U, w \in W$ 使得 $v = u + w$，那么对于特定的 U 的一个基 b_u 和特定的一个 W 的基 b_w，相当于 $\{b_u, b_w\}$ 就是 V 的一个张成组，削减成基后也符合要求。
6. 反例：$\{1, z, z^2 + z^3, z^3\}$
7. 张成是肯定的，假设线性相关，则能得出 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 也线性相关，反证线性无关。
8. 假设存在一个 $\hat{u} \in U$ 且 $\hat{u} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \boldsymbol{k}$（$\boldsymbol{k} \notin \mathrm{span}(v_1, v_2)$），实际上我们有 $\boldsymbol{k} = b_3 v_3 + b_4 v_4$，所以可以做这样一个构造：$U = \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3 + v_4)$，我们可以保证这几个东西的线性组合不可能表示为 v_3 或者 v_4。
9. 首先 $\{v\}$ 无关则 $\{w\}$ 无关是显然的，反之亦然。其次 $\mathrm{span}(\{v\})$ 和 $\mathrm{span}(\{w\})$ 完全相等。
10. 每个 v 可唯一表示为 $u + w$，而每个 $u + w$ 可唯一表示为……（而且它们显然是线性无关的）
11. $v_c \in V_C$ 实际上是 $v_1 + i v_2$（$v_1, v_2 \in V$）